Digitalna obrada signala

Diskretna Furijeova transformacija

Ω

ω

Za početak, podsećanje, posmatrajmo diskretan periodičan niz sa periodom *N*

Diskretan niz.
Niz vrednosti, brojeva.
Definisan redosledom, nema vremensku dimenziju.

Pitanje da li je moguće predstaviti bilo koji član niza preko harmonijskih komponenti

$$x(n) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} X(k) e^{jnk\Omega_0} \quad gde \quad je \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

Digitalna obrada signala

Diskretna Furijeova transformacija

$$e^{jnk\omega_0} \quad period \quad N$$

$$niz \quad period \quad N, \quad x(n) = x(n+N)$$

$$X(k) = X(k+N)$$

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{jnk\Omega_0}$$

Furijeov red

$$X(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jkn\Omega_0}$$

Digitalna obrada signala

Diskretna Furijeova transformacija

Posmatrajmo kontinualan periodičan signal sa periodom T
I diskretizovan signal koji je dobijen odabiranjem sa periodom Ts

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad gde \quad je \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$X(k\omega_0) = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

I diskretizovan signal koji je dobijen odabiranjem prethodnog signala sa periodom Ts

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

Ako je ponovo dobijen periodičan signal sa periodom T=N Ts, gde je N ceo broj

$$X_p(k\omega_0) = \frac{1}{T} \int_T x_p(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \right) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-jk\omega_0 nT_s}$$

Digitalna obrada signala

Diskretna Furijeova transformacija

Spektar diskretizovanog perodičnog signala je periodičan sa periodom 2π

$$jk\omega_0 nT_s = jk\frac{2\pi}{T} nT_S = jk\frac{2\pi}{N} n$$

A to odgovara učestanosti

$$j(k+N)\omega_0 nT_s = jk\omega_0 nT_S + jN\omega_0 nT_S = jk\omega_0 nT_S + j\omega_s nT_S$$

$$gde \quad je$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = N\omega_0 = N\frac{2\pi}{T}$$

$$N = \frac{T}{T_S}$$

Digitalna obrada signala
Diskretna Furijeova transformacija

Diskretan periodičan niz $$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jkn\Omega_0}$$

Diskretizovan periodičan signal $$X_p(k\omega_0) = \frac{1}{T}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s)e^{-jk\omega_0 nT_s}$$

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jkn\Omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega_s}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jkn\frac{2\pi}{N}} = \frac{T_s}{T}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jk\omega_0 nT_s}$$

$$\boxed{X_p(k\omega_0) = \frac{1}{T_s}X(k)}$$

Digitalna obrada signala
Diskretna Furijeova transformacija

Teorema odabiranja

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

$$Y_r(j\omega) = X_p(j\omega)H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = ? \qquad H(j\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \qquad h(t) = \frac{T_s \sin(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$y_r(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)h(t - nT_s)$$

$$\boxed{y_r(t) = \frac{\omega_c T_S}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\frac{\sin(\omega_c(t - nT_s))}{\omega_c(t - nT_s)}}$$

Digitalna obrada signala

Diskretna Furijeova transformacija

Aperiodičan signal

$$X(\Omega) = X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Period 2π

Odabiranje u spektru sa N ekvidistantnih tačaka u opsegu

$$(0, 2\pi) \qquad \Delta\Omega = \frac{2\pi}{N}$$

$$X(\tfrac{2\pi}{N}k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

Malo matematike

$$X(\tfrac{2\pi}{N}k) = \cdots + \sum_{n=-N}^{-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} + \cdots =$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N} \qquad n \text{ sa } n-lN$$

$$X(\tfrac{2\pi}{N}k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN]\right]e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

Digitalna obrada signala

Diskretna Furijeova transformacija

1 $$X(\tfrac{2\pi}{N}k) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN]\right]e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

Pretpostavimo da je ovaj signal periodičan sa periodom N

$$x_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k\, e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

2 $$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_p[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

1 i 2 $$c_k = \frac{1}{N} X(\tfrac{2\pi}{N}k), \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

odnosno

$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\tfrac{2\pi}{N}k)\, e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

Digitalna obrada signala

Diskretna Furijeova transformacija

$$x_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\tfrac{2\pi}{N} k)\, e^{j 2\pi k n / N}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

Znači ako u frekventnom domenu odaberemo N tačaka možemo rekonstruisati neki periodičan signal sa periodom N

Koji su uslovi da tu "bude" signal $x(n)$

1 $x_p(n)$ periodično produženje $x(n)$

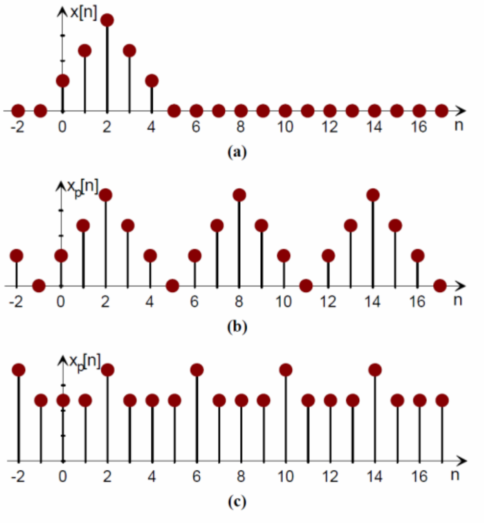
2 $x_p(n)$ u periodi N se nalazi orginal $x(n)$

3 $x(n)$ ograničenog trajanja

4 N veće od trajanja tako da ne dolazi do preklapanja u vremenskom domenu

Digitalna obrada signala

Diskretna Furijeova transformacija



Slika 4.1 Periodično produženje konačne sekvence: (a) originalna sekvenca, $L = 5$, (b) produženje bez preklapanja, $L < N = 6$, (c) produženje sa preklapanjem, $L > N = 4$.

Digitalna obrada signala
Diskretna Furijeova transformacija

Isto ovo na drugi način

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\tfrac{2\pi}{N}k)\, e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

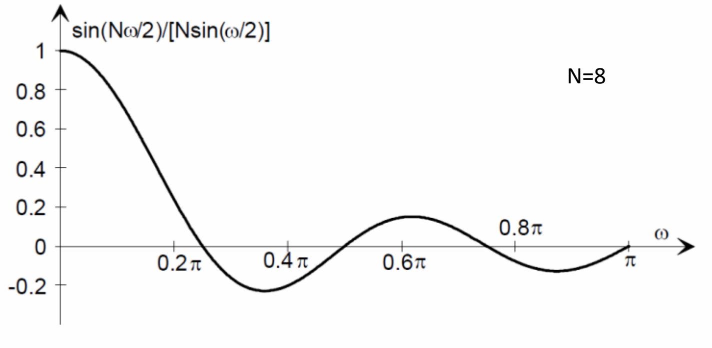
$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(\tfrac{2\pi}{N}k) e^{j2\pi kn/N}\right] e^{-j\Omega n}$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(\tfrac{2\pi}{N}k)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j(\Omega-2\pi k/N)n}\right]$$

$$P(\Omega) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-j\Omega N}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{1}{N}\frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j\Omega(N-1)/2}$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) P\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

Digitalna obrada signala
Diskretna Furijeova transformacija



Slika 4.2 Interpolaciona funkcija u frekvencijskom domenu sin(Ω*N*/2)/[*N*sin(Ω/2)].

$$P\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k = 1,2,\cdots,N-1 \end{cases}$$

Digitalna obrada signala
Diskretna Furijeova transformacija

Moguće je rekonstruisati periodičnu sekvencu i njen spektar iz ekvidistantnih odbiraka u spektralnom domenu

L dužina aperiodične sekvence

N broj odmeraka u spektralnom domenu

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le L-1 \\ 0, & L \le n \le N-1 \end{cases}$$

DFT
$$X[k] = X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

IDFT
$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

Digitalna obrada signala
Diskretna Furijeova transformacija

Matrični oblik

DFT
$$\mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N$$

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

gde je

$$W_N = e^{-j2\pi/N}$$

IDFT
$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N^{-1}\mathbf{X}_N = \frac{1}{N}\mathbf{W}_N^{*}\mathbf{X}_N$$

$$\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^{*} = N\mathbf{I}_N$$

Digitalna obrada signala
Diskretna Furijeova transformacija

OSOBINE

Linearnost: $ax_1[n]+ax_2[n] \xleftrightarrow{DFT} aX_1[k]+aX_2[k]$

Periodičnost: $X[k]=X[k+N]$

Konjugovana kompleksnost: $x^*[n] \xleftrightarrow{DFT} X^*[N-k]$

$$X[k]=X^*[N-k]$$

$$X_R[k]=X_R[N-k]$$

$$X_I[k]=-X_I[N-k]$$

$$|X[k]|=|X[N-k]|$$

$$\arg(X[k])=-\arg(X[N-k])$$

Digitalna obrada signala
Diskretna Furijeova transformacija

OSOBINE

$$x[n]=x[-n] \Rightarrow X[k] \text{ je čisto realna sekvenca}$$

$$x[n]=-x[-n] \Rightarrow X[k] \text{ je čisto imaginarna sekvenca}$$

Osobine periodičnosti i simetrije DFT su veoma važne zbog toga što omogućavaju da se za realnu sekvencu $x[n]$ izračunavaju samo vrednosti $H[k]$ za $0 \le k \le N/2$, koje odgovaraju vrednostima $H(e^{j\omega})$ za $0 \le \omega \le \pi$.

Računanje linearne konvolucije preko DFT

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$N_Y = N_X + N_H - 1$$

DFT sekvence $y[n]$ u N_Y tačaka

$$Y[k] = X[k]H[k], \; 0 \le k \le N_Y - 1$$

DFT spektri $X[k]$ i $H[k]$ moraju takođe biti izračunati u N_Y

sekvence $x[n]$ i $h[n]$ moraju biti dopunjene sa izvesnim brojem nula

$$N_{zi} = N_Y - i = N_X + N_H - 1 - i, \quad i = N_X, N_H$$

Frekvencijske karakteristike DFT

$$x[n] = e^{j\Omega n} = e^{j2\pi nF/F_s}$$

F nije ucestanost u kojima se racuna DFT

Fs/F nije celobrojna vrednost,
ili N ne odgovara periodičnosti ulaznog signala

nenulte vrednosti *svih elemenata DFT sekvence*

prema Parsevalovoj teoremi

energija izračunata u vremenskom i frekvencijskom domenu mora biti ista

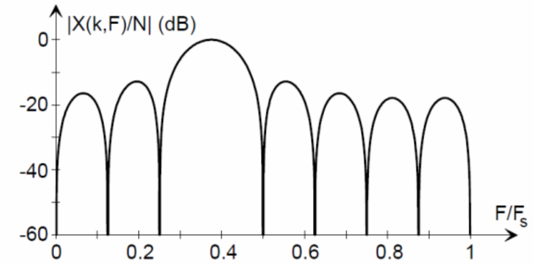
Digitalna obrada signala

Diskretna Furijeova transformacija

$$X(k,F)=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j2\pi Fn/F_s}\,W_N^{nk}=\frac{1-e^{-j2\pi(k/N-F/F_s)N}}{1-e^{-j2\pi(k/N-F/F_s)}}$$

$$\Theta_k=2\pi(k/N-F/F_s)$$

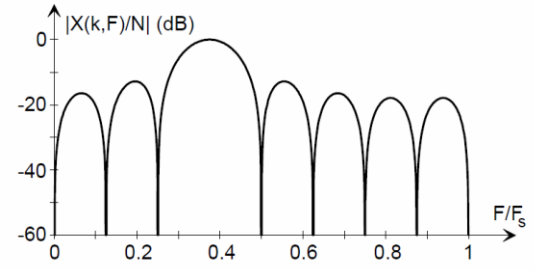
$$X(\Theta_k)=\frac{\sin(\Theta_k N/2)}{\sin(\Theta_k/2)}e^{-j\Theta_k(N-1)/2}$$



Slika 4.5 Amplitudska karakteristika DFT za slučaj $N = 8$, $k = 3$.

Digitalna obrada signala

Diskretna Furijeova transformacija



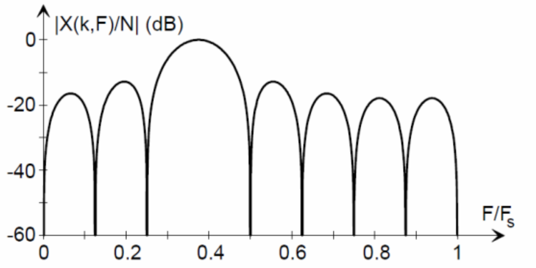
Slika 4.5 Amplitudska karakteristika DFT za slučaj $N = 8$, $k = 3$.

Amplitudska karakteristika k-tog elementa DFT ima maksimalnu vrednost za učestanosti u okolini $\Theta_k = 0$, tj. $F = kF_s/N$ (glavni luk), i ima nule na učestanostima $F = (k-r)F_s/N$, $r \neq 0$. Delovi karakteristike između nula (bočni lukovi) su manje, ali ne beznačajne amplitude. Ova pojava se naziva *curenje spektra* i rezultat je direktne primene DFT na sekvencu $x[n]$. Spektralno curenje je nepoželjna osobina koja utiče na kvalitet analize spektra. Da bi se smanjilo spektralno curenje primenjuju se razne modifikacije sekvence $x[n]$ koje će biti opisane u narednom izlaganju.

Prozorske funkcije

Digitalna obrada signala

Diskretna Furijeova transformacija



Slika 4.5 Amplitudska karakteristika DFT za slučaj $N = 8$, $k = 3$.

Sa slike 4.5 može se uočiti da je širina glavnog luka dvostruko veća od frekvencijskog razmaka DFT odbiraka. To znači da će se glavni lukovi amplitudskih karakteristika susednih DFT odbiraka preklapati sa jednom polovinom svoje širine. Kao posledica te činjenice, ako spektralna komponenta ulaznog signala pada u region preklapanja dve susedne koponente, njena amplituda ne može biti precizno detektovana jer će proizvesti značajne vrednosti dva DFT odbirka. Slabljenje amplitude spektralne komponente zbog curenja u druge DFT odbirke naziva se *scalloping loss* ili *picket-fence effect*.

Digitalna obrada signala

Diskretna Furijeova transformacija

Frekvencijska selektivnost DFT se definiše kao sposobnost razdvajanja komponenata u spektru ulaznog signala. Komponente koje pripadaju glavnom luku ne mogu se razdvojiti. Dakle, selektivnost DFT zavisi od broja tačaka u kojima se izračunava DFT ali i od načina modifikacija ulazne sekvence radi smanjenja spektralnog curenja jer takva modifikacija utiče na širinu glavnog luka.

Na kraju, definišimo i *ekvivalentni propusni opseg šuma* (engl. *equivalent noise bandwidth* - *ENBW*) koji se definiše kao propusni opseg idealnog filtra koji propušta beli šum, čija je snaga jednaka snazi belog šuma na odgovarajućem DFT izlazu. *ENBW* može poslužiti kao mera za kvalitet raznih modifikacionih funkcija ulaznog signala.